DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD DE ANTOFAGASTA

SEGUNDA GUIA DE EJERCICIOS CÁLCULO III

1. Determine una función $r : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R^2}$ que parametrice la curva indicada:
a) la recta $y = 2x$ recorrida del tercer al primer cuadrante.
b) la cuarta parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$ que se encuentra en el segundo cuadrante, recorrida en el sentido contrario al reloj.
c) el segmento de curva $y = |x^2 - 1|$ comprendido entre $x = -2$ y $x = 2$, recorrido de derecha a izquierda.

2. Determine una función $r : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R^3}$ que parametrice la curva indicada:
a) la parte de la recta que resulta de la intersección de los planos $x + 2y - z = 0$, $3x - y + 5z = 0$ correspondiente a $z \geq 0$, comenzando en el orígen.
b) la curva C intersección de las superficies $x^2 + y^2 = z$ y el plano $z = 4$, comenzando en el punto $(0, 2, 4)$ con el sentido $(0, 2, 4) \longrightarrow (-2, 0, 4) \longrightarrow (0, -2, 4) \longrightarrow (0, 2, 4)$.

3. Sea $C : r(t) = (\frac{4}{5}cos(t), 1 - sen(t), -\frac{3}{5}cos(t)), t > 0$. Demuestre que C es una circunferencia y encuentre su centro y radio.

4. Determine la trayectoria $H(t)$ tal que $H(0) = (0, -5, 1)$ y $H'(t) = (t, e^t, t^2)$.

5. Hallar la ecuación de la tangente en un punto arbitrario de la curva $C : r(t) = (\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2})$. Hallar los puntos donde esta tangente es paralela al plano $x + 3y + 2z = 10$.

6. Suponga que una partícula sigue la trayectoria $\phi(t) = (e^t, e^{-t}, cos(t))$, hasta que sale por una tangente en $t = 1$. ¿Dónde se encuentra en el instante $t = 2$?

7. Una partícula se desplaza en el plano XY a lo largo de una curva C de ecuación $y = ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1$, con rapidez constante $\frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{m}{s})$, partiendo del punto $(0, 1)$ en el instante $t = 0$. Determinar la ecuación de la recta tangente en el punto en que se encuentra la partícula después de haber transcurrido 2 seg. desde la partida.

8. Hállese el ángulo con el que debe lanzarse un objeto para lograr:
a) la máxima distancia
b) la máxima altura

9. Una manguera de riego lanza agua con una velocidad de 40 pies por segundo. Determine la altura que alcanza el agua si ésta es lanzada por la manguera formando un ángulo de 60 grados con respecto al suelo.

10. Un proyectil es disparado con rapidez inicial de 1500 $(\frac{pie}{seg})$ y un ángulo de elevación de 30^o. Encuentre:
a) su velocidad en cualquier instante
b) su altura máxima
c) su alcance
d) la rapidez con que choca el proyectil en el suelo

11. Demuestre que si una partícula recorre una curva C con velocidad constante, la aceleración es siempre normal a la curva C.

12. Considere una partícula moviéndose en una trayectoria circular de radio ρ descrita por $r(t) = (\rho cos(\omega t), \rho sen(\omega t))$, donde $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ es la velocidad angular constante.
a) determine el vector velocidad y muestre que es ortogonal a $r(t)$
b) duestre que la rapidez de la partícula es $\rho\omega$
c) determine el vector aceleración y su magnitud. Muestre que siempre se halla dirigido hacia el centro de la circunferencia.

13. Un jugador de beisbol lanza una pelota a una distancia de 250 pies. ¿Cuál es la rapidez inicial de la pelota si fue lanzada con un ángulo de 45^o con respecto al suelo ?

14. Para cargar un vagón con balas de algodón hay que lanzar las balas a una posición que está 8 pies sobre el suelo y a 16 pies de distancia de la salida de la máquina empacadora. Hallar la velocidad mínima de la bala y el ángulo correspondiente de lanzamiento.

15. Calcular la máxima altura y el alcance de un proyectil disparado desde 3 pies de altura con velocidad inicial de 900 (pies/seg) con un ángulo de 45^o sobre la horizontal.

16. Un proyectil se dispara con una velocidad inicial de $\vec{v}_0 = (1, 2, 3)$ bajo la acción de un campo gravitacional de $g = 10(m/seg^2)$. Si el disparo se hace desde el punto $(0, 0, 0)$ y no se tomó en cuenta la resistencia del aire, determinar la velocidad del proyectil y su posición cuando se encuentra en el plano

$$\Pi : x + y + z + 800 = 0.$$

17. Una partícula pasa por el orígen desplazandose a lo largo de la curva determinada por la trayectoria

$$H(t) = t\ \ \hat{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\ \ \hat{j} + \frac{1}{2}t^2\ \ \hat{k}, t \geq 0.$$

Determine el vector posición de la partícula si ésta se desplaza con rapidez igual a 1. Determine las aceleraciones tangencial y normal en el instante en que la partícula pasa por el punto $H(2)$.

18. Calcular las curvaturas de las siguientes trayectorias:
a) $\psi(t) = (rcos(\omega t), rsen(\omega t), ct)$
b) $\psi(t) = (e^{-t}cos(t), e^{-t}sen(t), 0)$. Qué ocurre con la curvatura si $t \longrightarrow \infty$?

19. Demuestre que si una partícula recorre una curva C con rapidez constante, entonces la magnitud de la aceleración es directamente proporcional a la curvatura de C, es decir, $\| a(t) \| = cK$, $c \in \mathbf{R}$.

20. Un móvil se desplaza por el espacio de manera que su vector posición está dado por $r(t) = (cos(t), sen(t))$. Cuánto demora en desplazarse 5 unidades de longitud desde el punto de coordenadas $(1, 0)$? ¿ Cuánto demora en desplazarse 5 unidades de longitud desde cualquier punto de la curva ?

21. Demostrar que la tangente y la normal de la curva $C : r(t) = e^t(cos(t), sen(t), 1))$ forman un ángulo constantes con el eje Z.

22. Hallar la longitud de la curva $C : r(t) = (t, 1 + t^2)$, desde el punto en que r(t) y r'(t) son paralelos y de sentido contrario, hasta el punto que los mismos vectores sean ortogonales.

23. Sea $C : r(t) = e^t(cos(t), sen(t), 1), t \geq 0$. Describa C en términos del parámetro longitud de arco.

24. Halle los puntos de máxima curvatura de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.

25. Hallar las ecuaciones de la tangente y normal a la curva $C : r(t) = (2t^2, t-1, 3t^2)$ en el punto en que corta al plano XZ.

26. Se lanza un proyectil desde el suelo con un ángulo de elevación θ y rapidez inicial v_0. Halle las fórmulas de las componentes normal (A_T) y tangencial (A_N) de la aceleración del proyectil en el tiempo t. Halle A_T y A_N cuando el proyectil alcanza su altura máxima.

27. Sea $C : r(t) = e^t(2\sqrt{at}, t, 1)$, donde **a** es una constante positiva. ¿En que punto de C el radio de la curvatura alcanza su valor mínimo? ¿cuál es ese valor?