DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD DE ANTOFAGASTA

TERCERA GUIA DE EJERCICIOS CÁLCULO III

1. En los siguientes ejercicios hallar el rotacional del campo vectorial dado:
   a) $F(x,y,z) = e^{-xyz}(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})$ b) $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})$
   c) $F(x,y,z) = e^x sen(y)\hat{\imath} - e^x cos(y)\hat{\jmath}$ d) $F(x,y,z) = arctg(\frac{x}{y})\hat{\imath} + ln\sqrt{x^2+y^2}\hat{\jmath} + \hat{k}$

2. En los siguientes ejercicios hallar la divergencia del campo vectorial dado:
   a) $F(x,y,z) = e^{-xyz}(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})$ b) $F(x,y,z) = e^x sen(y)\hat{\imath} - e^x cos(y)\hat{\jmath}$
   c) $F(x,y,z) = sen(x)\hat{\imath} + cos(y)\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$ d) $F(x,y,z) = ln(x^2+y^2)\hat{\imath} + xy\hat{\jmath} + ln(x^2+z^2)\hat{k}$

3. Determinar si los siguientes campos son conservativos. En caso afirmativo, hallar la función potencial:
   a)$F(x,y,z) = 3x^2y^2z\hat{\imath} + 2x^3yz\hat{\jmath} + x^3y^2\hat{k}$ b) $F(x,y,z) = e^z(y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + xy\hat{k})$

4. Hallar $rot(rotF) = \nabla \times (\nabla \times F)$ para los siguientes campos vectoriales:
   a) $F(x,y,z) = xyz\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ b) $F(x,y,z) = x^2z\hat{\imath} - 2xz\hat{\jmath} + yz\hat{k}$

5. ¿Cuál de las siguientes expresiones (si hay alguna) coincide con $div(F \times G)$ para cualesquiera campos vectoriales F y G ?
   a) $(divF)(divG)$
   b) $(rotF) \cdot G - F \cdot (rotG)$
   c) $F(divG) + (divF)G$
   d) $(rotF) \cdot G + F \cdot (rotG)$

6. Si $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, y $r = \|\vec{r}\|$, calcular $rot(f(r)\vec{r})$, siendo f una función derivable.

7. Si $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, y $\vec{A}$ es un vector constante, demostrar que $rot(\vec{A} \times \vec{r}) = 2\vec{A}$.

8. Si $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, y $r = \|\vec{r}\|$, hallar todos los valores de n para los que $(r^n\vec{r}) = 0$.

9. Si $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, y $r = \|\vec{r}\|$, demostrar que $\nabla \| \vec{v} \|^3 = 3r\vec{r}$.

10. Demostrar que $rot(rotF) = grad(divF) - \nabla^2 F$, si las componentes de F tienen derivadas parciales mixtas de segundo orden contínuas.

11. Un campo de fuerzas f del espacio tridimensional viene dado por $f(x,y,z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + (xz - y)\hat{k}$. Calcular el trabajo realizado por esa fuerza al mover una partícula desde $(0,0,0)$ a $(1,2,4)$ a lo largo del segmento de recta que une esos puntos.

12. Hallar el trabajo realizado por la fuerza $f(x,y) = (x^2 - y^2)\hat{\imath} + 2xy\hat{\jmath}$ al mover una partícula en sentido contrario del reloj recorriendo una vez el contorno del cuadrado limitado por los ejes coordenados y las rectas $x = a$ e $y = a$, $a > 0$.

13. Un campo de fuerzas bidimensional f viene dado por la ecuación $f(x,y) = cxy\hat{\imath} + x^6y^2\hat{\jmath}$ siendo c una constante positiva. Esa fuerza actúa sobre una partícula que se mueve desde $(0,0)$ hasta la recta $x = 1$ siguiendo una curva de la forma $y = ax^b$, donde $a > 0$, $b > 0$. Encontrar el valor de a (en función de c) tal que el trabajo realizado por esa fuerza sea independiente de b.

14. Un campo de fuerzas f en el espacio tridimensional viene dado por la fórmula $f(x,y,z) = yz\hat{\imath} + xz\hat{\jmath} + x(y+1)\hat{k}$. Calcular el trabajo realizado por f al mover una partícula recorriendo una vez el contorno del triángulo de vértices $(0,0,0), (1,1,1), (-1,1,-1)$ en este orden.

15. Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $f(x, y, z) = (y - z)\hat{\imath} + (z - x)\hat{\jmath} + (x - y)\hat{k}$ a lo largo de la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el plano $z = y\,tg(\theta)$, en donde $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. El camino es recorrido de modo que, observado el plano XY desde el eje Z positivo, el sentido aparezca contrario al de las agujas del reloj.

16. Un campo de fuerzas viene dado en coordenadas polares por la ecuación

$$F(r, \theta) = -4sen(\theta)\hat{\imath} + 4sen(\theta)\hat{\jmath}.$$

Calcular el trabajo efectuado al mover una partícula desde el punto $(1, 0)$ al origen siguiendo un espiral de ecuación polar $r = e^{-\theta}$.

17. Un alambre tiene la forma de un círculo $x^2 + y^2 = a^2$. Determinar su masa y su momento de inercia respecto a un diámetro si la densidad en (x, y) es $\mid x \mid + \mid y \mid$.

18. Hallar la masa de un alambre cuya forma es la de la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 0$ si la densidad del alambre en (x, y, z) es x^2.

19. Determinar las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centro de gravedad del muelle que tiene forma de hélice cuya ecuación es $\alpha(t) = a\,cos(t)\hat{\imath} + a\,sen(t)\hat{\jmath} + b\,t\,\hat{k}$ con densidad $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

20. Usar el Teorema de Green para calcular la integral $\int_C y^2dx + xdy$ cuando :
a) C es el cuadrado de vértices $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$.
b) C es la circunferencia de radio 2 y centro en el origen.
c) C tiene la ecuación vectorial $\alpha(t) = 2cos^3(t)\hat{\imath} + 2sen^3(t)\hat{\jmath}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

21. Compruebe el Teorema de Green en el plano para la integral $\int_C (3x + 4y)dx + (2x - 3y)dy$, siendo C una circunferencia de radio dos con centro en el origen y que se recorre en sentido positivo.

22. Use el Teorema de Green para calcular el trabajo realizado por la fuerza $F(x, y) = (3y - 4x)\hat{\imath} + (4x - y)\hat{\jmath}$ cuando un objeto recorre una vez la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ en el sentido contrario a las agujas del reloj.

23. Calcular la integral curvilínea

$$\int_C (x^2ydx - y^2xdy)$$

donde C es el borde de la región comprendida entre el eje X y la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj.

24. Demuestre que

$$\int_C (5 - xy - y^2)dx - (2xy - x^2)dy = 3\bar{x}$$

donde C es el cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj y $\bar{x}$ es la abscisa del centro de gravedad del cuadrado.