

CUARTA GUIA DE EJERCICIOS CÁLCULO III

- En los siguientes ejercicios hallar una ecuación del plano tangente a la superficie dada por la función vectorial en el punto indicado:
 - $r(u, v) = (u + v)\hat{i} + (u - v)\hat{j} + v\hat{k}$ en el punto $(1, -1, 1)$.
 - $r(u, v) = u\cosh(v)\hat{i} + u\sinh(v)\hat{j} + u^2\hat{k}$ en el punto $(-2, 0, 4)$.
- En los siguientes ejercicios calcular el área de la superficie sobre la región indicada:
 - la esfera $r(u, v) = a\sin(u)\cos(v)\hat{i} + a\sin(u)\sin(v)\hat{j} + a\cos(u)\hat{k}$ con $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$
 - el toro $r(u, v) = (a + b\cos(v))\cos(u)\hat{i} + (a + b\cos(v))\sin(u)\hat{j} + b\sin(v)\hat{k}$ con $a > b$, $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$
- Calcular el área de la región que en el plano $x + y + z = a$ determina el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.
- Calcular el área de la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = ay$, siendo $a > 0$.
- Calcular el área de la porción de superficie $z^2 = 2xy$ que se proyecta en el primer cuadrante del plano xy y limitada por los planos $x = 2$ e $y = 1$.
- Calcular el área de la porción de superficie cónica $x^2 + y^2 = z^2$ situada por encima del plano xy y limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$.
- Calcular el área de la porción de paraboloides $x^2 + y^2 = 2ay$ cortada por el plano $y = a$.
- En los siguientes ejercicios calcule $\int \int_S xy dS$ donde:
 - $S : z = 2 - y$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$
 - $S : z = 5$, $x^2 + y^2 \leq 1$
 - $S : z = 9 - x^2$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq x$
 - $S : z = h$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$
- En los siguientes ejercicios calcule $\int \int_S x^2 + y^2 dS$ donde:
 - $S : z = 4 - x - 2y$, $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 2$
 - $S : z = 4$, $x^2 + y^2 \leq 1$
 - S es la superficie limitada por arriba por el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y por abajo por el plano $z = 0$.
- Calcule $\int \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$ donde S es el trozo del plano $z = x + 1$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
- En los tres problemas siguientes calcule $\int_S F \cdot N dS$ donde N es la normal hacia afuera.
 - $F = x\hat{i} + 2y\hat{j} - 3z\hat{k}$ y S es la parte del plano $15x - 12y + 3z = 6$ que yace sobre el cuadrado unitario $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
 - $F = x\hat{i} + y\hat{j}$ y S es el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
 - $F = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ y S es el trozo de plano $z = y + 1$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
- Calcule $\int_S (x - y^2 + z) dS$ donde S es la superficie definida por $R(u, v) = u^2\hat{i} + v\hat{j} + u\hat{k}$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$.

13. En los tres problemas siguientes calcular la masa de la lámina homogénea que tiene la forma de la superficie S. Suponga que $\rho(x, y, z) = 1$.
- S es la superficie $z = 10 - 2x - y$, con $z \geq 0$ y $y \geq 0$.
 - S es la superficie $z = 1 - x^2 - y^2$, con $z \geq 0$.
 - S es el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.
14. Calcular la masa de la lámina de superficie $S : z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ si la densidad viene dada por $\rho(x, y, z) = kz$.
15. En los siguientes problemas compruebe que se verifica el Teorema de Stokes:
- $F = z\hat{i} + 2x\hat{j} + 3y\hat{k}$, sobre el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, con $z \geq 0$.
 - $F = (x + 2z)\hat{i} + (y - x)\hat{j} + (z - y)\hat{k}$, sobre el triángulo en que el plano $x + 2y + z = 3$ corta al primer octante.
 - $F = 2y\hat{i} - 6z\hat{j} + 3x\hat{k}$, sobre el paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$, por encima del plano XY y con la normal hacia afuera.
16. En los problemas siguientes use el Teorema de Stokes para calcular las integrales dadas:
- $\int_C (zdx + xdy + ydz)$ donde C es el triángulo de vértices $(3, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$ y $(0, 6, 0)$ recorrido en el sentido horario.
 - $\int_C (ydx + zdy + xdz)$ donde C es la intersección del plano $x + y = 2$ y la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$, recorrida en el sentido de las agujas del reloj vista desde arriba.
 - $\int_C (3ydx + 2zdy - 5xdz)$ donde C es el borde del hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ orientado positivamente.
 - $\int_C (2xy^2zdx + 2x^2yzdy + (x^2y^2 - 2z)dz)$ donde C es la curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $z = \sin(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, recorrida en la dirección de t creciente.
17. En los problemas siguientes use el Teorema de Stokes para calcular $\int_S (\text{rot}F \bullet N)dS$ si:
- $F = xy\hat{i} - z\hat{j}$ y S es la superficie del cubo unitario excepto la cara en que $z = 0$. Usar la normal hacia afuera.
 - $F = xy\hat{i} + x^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ y C es la intersección del paraboloides $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = y$
 - $F = 4y\hat{i} + z\hat{j} + 2y\hat{k}$ y C es la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ y el plano $z = 0$
18. Mediante el Teorema de Stokes, calcule la integral curvilínea

$$\int_C [(1 + y)zdx + (1 + z)xdy + (1 + x)ydz]$$

donde C es el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

19. Use el Teorema de Stokes para demostrar que:
- $\int_C ydx + zdy + xdz = \pi a^2 \sqrt{3}$, siendo C la curva de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el plano $x + y + z = 0$.
 - $\int_C (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz = 0$, siendo C la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ y el plano $y = z$.
 - $\int_C y^2dx + xydy + xzdz = 0$, donde C es la curva definida en 19)b).
20. Sea S el elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$$

y sea F un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en S. Use el Teorema de Stokes para demostrar que

$$\int \int_S (\text{rot}F \bullet N)dS = 0.$$

Importa que S sea un elipsoide ?

21. Sean f y g funciones escalares con derivadas parciales continuas y supongamos que S y C satisfacen las hipótesis del Teorema de Stokes. Verifique la igualdad

$$\int_C (f\nabla g) \bullet dr = \int \int_S (\nabla f \times \nabla g) \bullet NdS$$

22. En los siguientes problemas compruebe el Teorema de la Divergencia para la función vectorial F y el sólido D . Suponga que N es el vector normal unitario que apunta en sentido contrario al origen.
- $F = xz\hat{i} + y^2\hat{j} + 2z\hat{k}$ y D es la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.
 - $F = 2y^2\hat{j}$ y D es la parte del plano $x + 4y + z = 8$ en el primer octante.

23. En los problemas siguientes utilice el Teorema de la Divergencia para calcular la integral de superficie

$$\int_S \int F \cdot N dS$$

donde N es el vector normal unitario exterior.

- $F = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ y S es la superficie cúbica $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.
 - $F = (\cos(yz))\hat{i} + e^{xz}\hat{j} + 3z^2\hat{k}$ y S es la superficie del hemisferio $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ junto con el disco $x^2 + y^2 \leq 4$ en el plano XY .
 - $F = (x^2 + y^2 + z^2)\hat{i} + x^2y\hat{j} + 3z\hat{k}$ y S es la superficie cúbica $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$,
 - $F = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ y S es la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
24. Use el Teorema de la Divergencia para calcular

$$\int_S \int \|R\| R \cdot N dS$$

donde $R = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, con $a > 0$ constante y N es el vector normal unitario exterior.

25. Sea u una función escalar con derivadas parciales segundas continuas en una región que contiene a la región sólida T , con borde la superficie cerrada S .
- Demuestre que

$$\int_S \int \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_T \int \nabla^2 u dV$$

- Sean $u = x + y + z$ y $v = (x^2 + y^2 + z^2)/2$. Utilice la parte a) para calcular

$$\int_S \int (u\nabla v) \cdot N dS$$

donde S es la superficie cúbica $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

26. Demuestre que, si g es armónica en la región D , entonces

$$\int_S \int \frac{\partial g}{\partial n} dS = 0$$

donde S es la superficie cerrada que constituye el borde de D .

27. Demuestre la Primera Identidad de Green: Sean f y g funciones escalares y $F = f\nabla g$ continuamente diferenciable en el dominio sólido D de borde la superficie cerrada S , entonces

$$\int_D \int (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \int_S \int f \frac{\partial g}{\partial n} dS$$

28. Suponga que D, S y N satisfacen las hipótesis del Teorema de la Divergencia y que las funciones f y g tienen derivadas parciales continuas. Sean $D_N g = \nabla g \cdot N$ y $D_N f = \nabla f \cdot N$ las derivadas en la dirección del vector N . Demuestre que

$$\int_D \int (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dV = \int_S \int (fD_N g - gD_N f) dS$$

(Indicación: use dos veces el problema anterior.)