DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD DE ANTOFAGASTA

GUIA DE EJERCICIOS CÁLCULO NUMÉRICO
ECUACIONES NO-LINEALES

1. Discutir el número de raíces reales para cada una de las siguientes ecuaciones:
   a) $x + e^x = 0$ b) $e^x - 3x^2 = 0$ c) $e^x - lnx - 2 = 0$
   d) $x^2 + 4senx = 0$ e) $4x^5 - 5x^4 + 2 = 0$ f) $x^2 - 2^x = 0$

2. Determine cuáles de las siguientes ecuaciones satisfacen las condiciones de convergencia del Método de Newton en el intervalo dado:
   a) $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$, $[1, 2]$ b) $x - cosx = 0$, $[-1, 0]$
   c) $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$, $[1, 2]$ d) $x - cosx = 0$, $[0, \frac{\pi}{2}]$

3. Determine las raíces reales de las ecuaciones dadas a continuación, usando el método de Punto Fijo, determinando previamente funciones de iteración en cada caso:
   a) $3x^2 - e^x = 0$ b) $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$
   c) $e^{-x} + x^2 - 2 = 0$ d) $x - cosx = 0$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. La concentración de contaminantes en la región del plano $\{(x, y) : |x| < 3, |y| < 3\}$ está dada por la función $f(x, y) = x^3y^3 + x^3y^2 + 5x^2y + 4xy^2 + 4y^3$. Determine los puntos de ordenada $y = 1$ tal que (x, y) es un punto de la curva de nivel $f(x, y) = 3$, a través del Método de Newton (efectúe cuatro iteraciones). Justifique la elección de los valores iniciales de manera de garantizar convergencia.

2. El área encerrada por las curvas $y^2 + x = 1$, $y = 0$ es dividida en dos partes iguales por una parábola de la forma $y = \theta\sqrt{x}$. Determine el valor de θ.

3. Hallar el punto de inflexión de las siguientes curvas :
   a) $y = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}$ b) $y = e^{-x}lnx$

4. Hallar el área del mayor rectángulo que puede inscribirse entre las curvas $y = 0$, $y = cosx$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

5. Dada la ecuación $arctg(x) - x + 1 = 0$, determinar el intervalo más pequeño de números enteros que contiene a la raíz de la ecuación. Determine además el número de iteraciones necesarias para tener una exactitud de $\epsilon = 5 * 10^{-11}$ que se necesitan para calcular dicha raíz.

6. Muestre que la función $\phi(x) = \cos(\frac{3x}{2} - 1)$ posee un único punto fijo $\bar{x}$ en el intervalo $[0, \frac{4}{3}]$. Determine un intervalo I tal que para todo $x_0 \in I$ la sucesión $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n \in N$, converja para todo punto fijo $\bar{x}$ de ϕ. JUSTIFIQUE.

7. Utilizar $cos(3\theta) = 4cos^3(\theta) - 3cos(\theta)$ para hallar el valor de $cos(\frac{\pi}{9})$ con cinco cifras decimales exactas por los métodos de Newton y Bisección.

8. Sea p un número entero positivo. Demuestre que la sucesión

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right)$$

   puede ser utilizada para calcular $\sqrt[p]{a}$, cuando $a \geq 0$. Use esta sucesión para calcular $\sqrt[3]{7}$ con precisión $\varepsilon = 0.001$.

9. El valor de π puede ser obtenido a través de la solución de las siguientes ecuaciones:
   a) sen(x)=0 b) cos(x)+1=0
   Aplique el método de Newton con $x_0 = 3$ y una precisión de seis cifras decimales en cada caso y compare los resultados obtenidos.

10. Sea $f(x) = \frac{x^2}{2} + x(ln(x) - 1)$. Use algún método numérico estudiado para obtener sus puntos críticos.

11. Verifique que en el método de Punto Fijo, si $-1 < \phi'(x) < 0$ en un intervalo $\Im$ centrado en ξ, punto fijo de ϕ, entonces dado $x_0 \in \Im$, la sucesión $\{x_k\}$, donde $x_{k+1} = \phi(x_k)$, es oscilante en torno de ξ.

PROBLEMAS DE PRUEBAS ANTERIORES

1. Dada la ecuación $1 - x - 4x^2 - x^3 = 0$
   a) ¿Cuántas raíces reales posee ? Justifique.
   b) Realice 5 iteraciones para estimar la menor raíz usando el método de Punto Fijo, determinando previamente una adecuada función de iteración.
   c) El algoritmo de Newton posee la desventaja de la evaluación de la deirvada de la función f en cada punto. Una manera de evitar ésto, consiste en hacer el reemplazo

$$f'(x) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

   El algoritmo resultante se llama Método de la Secante. Realice 5 iteraciones con este algoritmo para estimar la mayor raíz de la ecuación dada.

2. El área del primer cuadrante limitada por la curva $y = -x^2 + 4x$, y el eje X es dividida en dos partes iguales por una recta que pasa por el orígen. Encontrar la ecuación de la recta. Verifique la igualdad.

3. Encuentre a lo menos dos funciones de iteración para el método de Punto Fijo para la mayor raíz de la ecuación $x^3 - x = 1$.

4. Dada la ecuación $ln(x+2) - x^2 = 0$, determinar
   a) Gráficamente el número de raíces reales y los intervalos que las contienen.
   b) La mayor raíz, usando el método de Newton con la mayor precisión posible.
   c) La función de iteración para la menor raíz, según el Método de Punto Fijo.

5. Dada la ecuación no lineal

$$3x^2 - e^x = 0$$

   a) Según el Método de la Bisección, ¿cuál es el mínimo número de iteraciones necesarias para hallar la menor raíz real de la ecuación anterior,

con una aproximación de 4 cifras decimales ?
b) Determine el esquema iterativo generado por el método de Punto Fijo, que permita calcular las raíces reales de la ecuación anterior.

6. El algoritmo de la Regula-Falsi(falsa posición) es similar al algoritmo de la bisección; el punto de subdivisión de cada sub-intervalo $[a_n, b_n]$ es ahora s_n, donde s_n es tal que divide a $[a_n, b_n]$ en dos partes proporcionales a $f(a_n), f(b_n)$.
a) Deduzca el algoritmo de Regula-Falsi.
b) Resuelva $\sqrt[3]{(x-1)} - cos(x) = 0$, iniciando con $a_0 = 1$,$b_0 = 2$.

7. Usando el método de bisección, se quiere encontrar una aproximacón de$\sqrt{3}$.
a) ¿Cuántas iteraciones son necesarias para garantizar una aproximaión con una exactitud de dos cifras decimales ?
b) i) Sea x_n es una aproximación de $\sqrt{3}$ y $[a_0, b_0]$ el intervalo inicial. Considerando el resultado de (a), completar una tabla de la forma

Tabla 1:

n	a_n	b_n	x_n
0			
1			
$\vdots$			

ii) Cuál es el valor aproximado de$\sqrt{3}$ con una exactitud de dos cifras decimales ?.

8. Usando el método de Punto Fijo con una exactitud de cuatro cifras decimales, calcular el área del rectángulo de área máxima que pueda inscribirse en la región limitada por las curvas $y = 4 - x^4$; $y = |x|$.(haga sus cálculos redondeando a 6 cifras decimales)

9. Considere el algoritmo de Newton en un intervalo $[a, b]$, con las condiciones

$$f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0, \forall x \in [a, b].$$

Justificando detalladamente, demostrar que partiendo con $x_0 = b$, la sucesión x_n generada por el algoritmo de Newton converge monotónicamente por la izquierda a la única raíz.