GUIA DE EJERCICIOS CÁLCULO NUMÉRICO
DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRICA

1. La Tabla 1 muestra los valores del desplazamiento de un proyectil.

Tabla 1:

t(seg)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
s(t)(en pies)	0	112	192	240	256	240	192	112	0

Usando derivación numérica, calcular cuando sea posible, la velocidad y aceleración del proyectil.

2. Deducir una fórmula para aproximar $f'''(a)$ utilizando los valores de $f(a)$, $f(a-h)$, $f(a+h)$ y $f(a+2h)$.

3. Sea $f(x) = xe^{3x}$. Aplicar la fórmula hallada en el problema anterior, con $h = 0.01$ para dar una aproximación de $f'''(0)$. Comparar con el valor real.

4. Usar la regla numérica $x'(t) = (x(t+h) - x(t))/h$ para obtener los valores aproximados en los puntos $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$, de la única función que verifica $x'(t) = x(t), x(0) = 1$.

5. Hallar una regla para la primera derivada de la forma
$$f'(x) \simeq Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h).$$

6. Sea $f(x) = [4 - \frac{sen^2(x)}{2}]^{1/2}, x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, use $h = \frac{\pi}{16}$
a) Estimar máx $\mid f^{(iv)}(x) \mid$, para $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$
b) ¿Para que valor de n se puede asegurar exactitud hasta la octava cifra decimal en el algoritmo de Simpson ?
c) Para n=6, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, estimar $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$, según el método de Simpson.

7. Deducir la *regla de los tres octavos* aproximando la integral $\int_a^b f(x)dx$ mediante la integral del polinomio de grado tres que interpola $f(x)$ en los puntos
$$x_i = a + ih; \quad i = 0, 1, 2, 3; \quad h = \frac{b-a}{3}.$$

8. Deducir la *regla de Boole* aproximando la integral $\int_a^b f(x)dx$ mediante la integral del polinomio de grado cuatro que interpola $f(x)$ en los puntos
$$x_i = a + ih; \quad i = 0, 1, 2, 3, 4; \quad h = \frac{b-a}{4}.$$

9. Usar la *regla de Boole* y la de *los tres octavos*, para aproximar $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ y comparar los resultados obtenidos con el valor exacto de la integral.

10. Dado el problema de contorno
$$y''(x) - xy'(x) + y(x) = 2 - x^2$$
$$y(0) + 2y'(0) = 0$$
$$y(1) - y'(1) = -1$$
usando $h = \frac{1}{4}$, obtener el sistema de ecuaciones generado al realizar la discretización del problema.

11. Encontrar el perímetro de la región del primer cuadrante acotada por la curva $y = x^3$ y la recta $y = 13x - 12$ con un error $E = 5 * 10^{-4}$(para estimar máx $|f^{iv}(x)|$ use $h = 0.25$).

12. Determinar el área entre la curva $y = e^{-0.6973x^2}$, $y = x^2$ con una exactitud hasta la quinta cifra decimal, use $h = 0.1$ para estimar máx $|f^{(iv)}(x)|$, $a \le x \le b$.

13. La fórmula $\int_a^b f(x)dx = h[y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots + y_{(2n-1)/2}]$, donde $y_{(2n-1)/2} = f(x_{i-1} + h/2), i = 1, \ldots, n$,se conoce como FÓRMULA DE LA TANGENTE, y su error está dado por

$$E = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\epsilon), \quad \epsilon \in [a, b].$$

Usando lo anterior:
a)Estimar la longitud de la curva $y = e^x$ para $x \in [0, 2]$ considerando $h = 0.25$.
b)Entregar el error cometido en la estimación anterior.

14. Estimar el valor de las siguientes integrales dobles:

$$\int_0^4 \int_0^x (x^2 + y^2) dy dx, \qquad \int_0^2 \int_1^3 (x^2 - 1/y) dy dx.$$

15. Para $f(x) = \sqrt{1 - (sen^2(x))/2}$, con $h = \frac{\pi}{16}$, estimar máx $|f^{(''')}(x)|$ y máx$|f^{(iv)}(x)|$ para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

16. Usando la regla de Simpson, calcule el área bajo la curva $y = sen(x^2)$ desde $x = 0$ a $x = \pi$ con una exactitud de 3 cifras decimales.

17. Calcular $\int_R \int (2x - 3y) dx dy$, siendo R la región limitada por las curvas $y = x^2$, $y = x$, $x \in [0, 1]$. Use el método de Simpson con $n = 4$ en ambas integrales.

18. Estimar el área limitada por la función $y = e^{-0.6973x^2}$, el eje Y y la curva que pasa por los puntos $(0, 0), (0.25, 0.0625), (0.5, 0.25), (0.75, 0.5625), (1, 1)$, con un error dado por $E = 5 * 10^{-6}$.

PROBLEMAS DE PRUEBAS ANTERIORES

19. Un cuerpo se lanza hacia arriba, describiendo un movimiento de tipo parabólico dado por $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$. Se realizan las mediciones mostradas en la Tabla 2.

Tabla 2:

t(seg)	0.2	0.5	1	1.6	3
s(t)(en pies)	28.96	40	52	55.84	20

Haciendo uso de los datos, estimar:
a) altura desde la cual se lanzó el cuerpo.
b) velocidad inicial del cuerpo.
c) la constante de gravedad.

20. Si máx$|f^{(iv)(x)}| = 823$ $\forall x \in [0, 1]$, determine el valor de n que permita calcular $\int_0^1 f(x)dx$,según el método de Simpson, con un error igual a 0.0005.

21. Calcular $\int_0^1 \int_1^2 (x^2 + 2xy - 3) dy dx$, aplicando la regla de Simpson en ambas integrales, con $n = 4$ en ambos casos.

22. Encontrar (no resolver) el sistema de ecuaciones lineales que se obtiene al reemplazar las fórmulas de derivación numérica, con $n = 4$, en el problema de frontera:

$$y'' - xy' + y = 2 - x^2,$$

$$y(0) + 2y'(0) = 0,$$

$$y(1) - y'(1) = -1.$$

23. Usando integración numérica de Simpson con $n = 4$ para ambas integrales, calcular detalladamente

$$\int_{R_{xy}} \int (x - y) dx dy$$

donde R_{xy} es la región limitada por las curvas $x = 4 - y^2$, $x = |3y|$.

24. Usando el método de Simpson para integración, determinar el valor de $ln(2)$ con una precisión de 10^{-4}.$(ln(\theta) = \int_1^\theta \frac{dx}{x})$