

GUIA DE EJERCICIOS CÁLCULO NUMÉRICO
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Calcular las normas matriciales para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$B = \begin{pmatrix} -9 & -1 & 0 \\ 2 & -8 & -3 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

2. Dado el sistema

$$2x_1 - x_2 + x_3 = -1$$

$$3x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0$$

$$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4$$

Encontrar las normas de las matrices de iteración del sistema. ¿Se puede garantizar convergencia para el método de Jacobi ? y para Gauss-seidel ?

3. Dado el sistema

$$4x - y = 2$$

$$-x + 4y + -z = 6$$

$$-x + 4z = 2$$

indicar dos procedimientos que permitan garantizar que el esquema de Gauss-Seidel es convergente a la solución exacta del sistema.

4. Use la eliminación Gaussiana con pivoteo parcial para resolver los sistemas

$$4x_1 + x_2 - x_3 = 6$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1$$

$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2$$

5. Resuelva los siguientes sistemas usando descomposición LU

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (5)$$

6. Dado el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= 2 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= -5 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= -11 \end{aligned}$$

- Determinar la matriz de iteración B_J . ¿Es convergente el Método de Jacobi para este sistema?
- Calcular las soluciones según el método de Jacobi, reordenando las ecuaciones previamente para garantizar convergencia.

7. Resolver el siguiente sistema usando descomposición LU con pivoteo parcial.

$$\begin{aligned} y + 3z &= 8 \\ 2x + y &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 4. \end{aligned}$$

8. Considere el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

que tiene una única solución $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$.

- Satisface el sistema el criterio de Sassenfeld? JUSTIFIQUE.
- Muestre que la sucesión generada por el método de Gauss-Seidel converge.

PROBLEMAS DE PRUEBAS ANTERIORES

9. Dado el sistema lineal:

$$2x_1 + x_2 + 6x_3 = 3$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -4$$

a) Hallar la solución usando eliminación de Gauss con pivoteo parcial con 4 cifras decimales exactas.

b) Verifique si el sistema lineal dado satisface el criterio de Sassenfeld. En caso negativo, intercambie filas del sistema de manera que, para el sistema resultante, el criterio de las líneas asegure convergencia del método de Gauss-Seidel.

c) Para el sistema obtenido en b), realice dos iteraciones con el método de Gauss-Seidel, a partir de $(x_0^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^t = (0, 0, 0)^t$.

10. Usando LU-CROUT, con pivoteo parcial, resuelva

$$3x - y + z = -8$$

$$x + y + z = 2$$

$$5x - y - z = -14.$$

En los cálculos utilice solo números racionales.

11. Resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3/4 & -1 \\ 1 & -1 & 23/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -11/4 \\ 101/16 \end{bmatrix} \quad (6)$$

utilizando el método de LU-CHOLESKY.

12. Usando el método de LU-CROUT con pivoteamiento parcial, en forma detallada resolver el siguiente sistema

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

13. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= -3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= -4\end{aligned}$$

- a) Realizando detalladamente el análisis sobre la convergencia, escribir las ecuaciones del esquema iterativo de Gauss-Seidel, que generan una sucesión convergente de soluciones aproximadas del sistema dado.
- b) Encontrar una solución aproximada del sistema dado, con una exactitud de $5 \cdot 10^{-2}$, considerando una aproximación inicial $x^{(0)} = (0.9, 0.9, -0.9, -0.9)^t$.

14. Resolver el sistema

$$\begin{aligned}-x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1\end{aligned}$$

usando el método LU-DOOLITTLE con pivoteamiento parcial.

15. Dado el sistema

$$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= -7\end{aligned}$$

- a) Deducir el esquema iterativo de Gauss-Seidel garantizando convergencia.
- b) Usando el esquema obtenido en a), encontrar una solución aproximada del sistema, con una exactitud de 2 cifras decimales, considerando la aproximación inicial $x^{(0)} = (0.6, 1.8, -0.8)^t$.