DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD DE ANTOFAGASTA

GUIA DE EJERCICIOS CÁLCULO NUMÉRICO
Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1. Para el problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = (x + y - 1)^2$; $y(0) = 2$ aplicar la fórmula de Euler con $h = 0.1$ para aproximar $y(0.5)$. Resuelva analíticamente el P.V.I. y compare el valor aproximado con el valor exacto.

2. Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea $\mathbf{v}$ de un objeto de masa $\mathbf{m}$ que cae desde una altura h se determina con

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \quad k > 0.$$

   Sean $v(0) = 0,\ k = 0.125,\ m = 5,\ g = 32\frac{pie}{seg^2}$. Use Runge-Kutta de orden 4, con $h = 1$ para hallar la velocidad del objeto que cae, cuando $t = 5seg$.

3. Escriba un esquema Predictor-Corrector, con Euler como fórmula Predictora y Euler Mejorado como fórmula Correctora.

4. Usando Euler para sistemas, estime $y(1.4)$ en:

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$$

   con $y(1) = 0.77$, $y'(1) = 0.44$

5. Considere el siguiente esquema

$$P : y^{(0)}_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{24}[55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n]$$

$$C : y^{(i)}_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{24}[9f^{(i-1)}_{n+4} + 19f_{n+3} - 5f_{n+2} + f_{n+1}]$$

   para estimar $y(1)$, con $h = 0.2$ en $y' = 2x - 3y + 1$, $y(0) = 1$. Para los valores previos necesarios use Runge-Kutta de orden 4. En el corrector haga dos iteraciones.

6. Dado el P.V.I. $y' = 2x - 3y + 1$; $y(1) = 5$ y $h = 0.1$. Estimar $y(0.5)$ mediante :
   1.1) el Método de Euler
   1.2) el Método de Euler Mejorado
   1.3) el Método de Runge-Kutta de orden 4
   1.4) el Método que se deduce al considerar tres términos en la Serie de Taylor.

   1.5) la fórmula $y_{n+4} = y_n + \frac{4}{3}h[2f(x_{n+3}, y_{n+3}) - f(x_{n+2}, y_{n+2}) + 2f(x_{n+1}, y_{n+1})]$

   1.6) la fórmula $y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{12}[5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n]$
   1.7) el Método explícito de Adams-Bashforth de cuatro pasos
   1.8) el Método implícito de Adams-Moulton de tres pasos
   1.9) el esquema Predictor-Corrector

$$P : y^{(0)}_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{24}[55fn + 3 - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n]$$

$$C : y^{(i)}_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{24}[9f^{(i-1)}_{n+4} + 19f_{n+3} - 5f_{n+2} + f_{n+1}]$$

   Para los valores previos necesarios use Runge-Kutta de orden 4. En el corrector haga dos iteraciones.

7. Calcule el error local en 1.7) y 1.8).

8. Repita los cálculos 1.1)-1.9) para el siguiente P.V.I.: $y' = 4x - 2xy$; $y(0) = 1$ y $h = 0.1$. En los casos en que se requiere valores adicionales utilice Runge-Kutta de orden 4.

9. Estimar $y(0.03)$ en $y'' + xy' + y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $h = 0.01$ usando Runge-Kutta para sistemas.

PROBLEMAS DE PRUEBAS ANTERIORES

10. Demuestre que cuando el método de Runge-Kutta de orden 4 es aplicado al problema $x'(t) = \lambda x(t)$, la fórmula para generar la solución es

$$x(t+h) = [1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \frac{1}{6}h^3\lambda^3 + \frac{1}{24}h^4\lambda^4]x(t)$$

11. Se efectúa un disparo hacia arriba contra la resistencia del aire de Cv^2. Suponga que la ecuación de movimiento es

$$\frac{dv}{dt} = -32 - \frac{Cv^2}{m}.$$

Si $\frac{C}{m} = 2$ y $v(0) = 1$, utilice el método de Euler para determinar un intervalo de tiempo de la forma (t_a, t_b) en donde el proyectil alcanza su altura máxima.

12. Usando la fórmula Predictor-Corrector

$$P : y_{n+1}^{(0)} = y_n + \frac{h}{24}[55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}]$$

$$C : y_{n+1}^{(i)} = y_n + \frac{h}{24}[9f_{n+1}^{(i-1)} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}] \;\; i = 1, 2, 3, \ldots$$

Calcular $y(0.4)$, haciendo dos correcciones, si

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \;\; y(0) = 1.$$

13. Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea, la velocidad **v** de un objeto de masa **m** que cae desde una altura **h** se determina con

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \;\; k > 0.$$

Sean $v(0) = 0$, $k = 0.125$, $m = 5$, $g = 32(pies/seg^2)$; usando el esquema

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3),$$
$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$
$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}),$$
$$k_3 = hf(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2),$$

hallar la velocidad aproximada del objeto que cae, cuando $t = 3seg$. Considere $h = 1$.

14. Considere el esquema

$$y_{m+1} = y_m + h[af(x_m, y_m) + bf(x_m + 3h, y_m + chf(x_m, y_m))],$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Cuales deben ser los valores de a,b,c para que éste esquema sea Runge-Kutta de orden 2?
b) Qué puede decir de su error local ?

15. Usando los esquemas

$$y_{m+2} = y_{m+1} + \frac{h}{2}[3f_{m+1} - f_m] \;\; m = 0, 1, 2, \ldots$$

$$y_{m+3} = y_{m+2} + \frac{h}{24}[9f_{m+3} + 19f_{m+2} - 5f_{m+1} + f_m] \;\; i = 0, 1, 2, \ldots$$

deducir un esquema Predictor-Corrector.

16. Dado el problema de valor inicial $y'(x) = x + y^2$, $y(0) = 1$. Usando el esquema deducido en el problema 15, con $h = 0.1$, encontrar una aproximación de $y(0.4)$ con una exactitud de 3 cifras decimales.

17. Considere los tres primeros términos de la Serie de Taylor

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{h^i}{i!} y^{(i)}(x_n)$$

para deducir un algoritmo de orden dos. Con este algoritmo resuelva el P.V.I.

$$\frac{dy}{dx} = -y + x + 1, \;\; y(0) = 1, \;\; 0 \leq x \leq 0.2, \;\; h = 0.1$$

18. Determinar los valores de A,B,C para que el esquema

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{A}[f(x_m, y_m) + Bf(x_m + 4h, y_m + Chf(x_m, y_m))],$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots$$

sea un método de Runge-Kutta de orden 2. Qué puede decir de su error local ?

19. Considerando el esquema de Euler mejorado

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}[f(x_m, y_m) + f(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m))] \;\; m = 0, 1, 2, \ldots$$

deducir un esquema que permita determinar aproximaciones de la solución del sistema

$$y'(x) = f(x, y, v); \;\; y(x_0) = y_0,$$

$$v'(x) = g(x, y, v); \;\; v(x_0) = v_0.$$

20. Dado el problema de valor inicial (P.V.I.)

$$y''(x) + (1 - x)y'(x) - xy(x) = e^x,$$

$$y(0) = 1,$$

$$y'(0) = 2.$$

a) Usando los esquemas de Adams-Bashforth de tres pasos y Adams-Moulton de dos pasos obtener un esquema Predictor-Corrector que le permita aproximar la solución del P.V.I. dado.
b) Usando el esquema obtenido en a), con $h = 0,1$ determinar una aproximación de $y(0.4)$ con una exactitud de 4 cifras decimales. Para obtener los valores previos necesarios use Runge-Kutta de orden 4.

21. Considere el esquema Predictor-Corrector dado por:

$$P : y_{n+4}^{(0)} = y_n + \frac{4h}{3}[2f_{n+3} - f_{n+2} + 2f_{n+1}]$$

$$C : y_{n+4}^{(i)} = y_{n+2} + \frac{h}{3}[f_{n+4}^{(i-1)} + 4f_{n+3} + f_{n+2}] \;\; i = 1, 2, 3, \ldots$$

Generalice este esquema para el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$y' = f(x, y, z); \;\; y(x_0) = y_0$$

$$z' = g(x, y, z); \;\; z(x_0) = z_0$$

Estime $y(0.4)$, $z(0.4)$ del sistema

$$y' = y - 4z; \;\; y(0) = 1$$

$$z' = -y + z; \;\; z(0) = 0$$

$$h = 0.1$$

Para los valores previos necesarios use Runge-Kutta de orden 4. Realice sólo una corrección.